Funkcje Analityczne

10.02.2023

- Proszę pisać rozwiązanie **każdego zadania** na **osobnej** kartce.
- Każdą kartkę proszę podpisać: **imieniem**, **nazwiskiem**, **numerem indeksu** oraz **numerem grupy** ćwiczeniowej lub **nazwiskiem** osoby prowadzącej ćwiczenia.

Zadanie 1. (10p.)

Oblicz całkę

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x+x^2}\, dx.$$

Zadanie 2. (10p.)

Niech $P(z) = z^9 + 4z^7 - z^2 + 8z + 1$.

(a) Wyznacz liczbę pierwiastków wielomianu P w pierścieniu $\{z \in \mathbb{C}\colon 1 < |z| < 3/2\}$.

(b) Pokaż, że P ma 4 pierwiastki w $\{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re}(z) > 0\}$, przy czym dwa w pierwszej ćwiartce.

Zadanie 3. (10p.)

Oznaczmy $\mathbb{H}_+ = \{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Im}(z) > 0\}$ oraz $\Omega = \mathbb{H}_+ \cup D(0,1)$.

(a) Wyznacz obraz obszaru Ω przez homografię $h(z) = \frac{z-1}{z+1}$.

(b) Znajdź odwzorowanie biholomorficzna przeprowadzające Ω na $D(0,1)$.

Zadanie 4. (10p.)

(a) Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem, który zawiera jednostkowy dysk domknięty $\overline{D}(0,1)$. Załóżmy, że $f \in H(\Omega)$. Pokaż, że istnieje stała c taka, że dla dowolnego $|\zeta| < c$, równanie

$$z = \zeta \cdot f(z)$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie $z_0(\zeta)$ na dysku $D(0,1)$.

(b) Pokaż, że dla $|\zeta| < c$, gdzie c jest taka jak w poprzednim punkcie, zachodzi następująca równość

$$z_0(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta^n}{n!} \cdot \left[\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{n-1} g_n(z) \right] |_{z=0},$$

gdzie $g_n(z) = f(z)^n(1 - \xi f'(z))$.

Wskazówka: Policz na dwa sposoby całkę $\int_{\partial D(0,1)} z \cdot \frac{F'(z)}{F(z)}\, dz$, gdzie $F(z) = z - \zeta f(z)$.

Zadanie 5. (10p.)

Dla $R > 0$ niech $\Omega_R = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| > R\}$. Rozważmy funkcję holomorficzną $f(z) = z^2 + 6z + 1$.

(a) Pokaż, że istnieje $R_0 > 0$ takie, że na obszarze Ω_{R_0} istnieją dokładnie dwie gałęzie pierwiastka kwadratowego z funkcji f.

Uwaga: Gałęzią pierwiastka kwadratowego z funkcji f na Ω_R nazywamy funkcję ciągłą g określoną na Ω_R, która spełnia $g(z)^2 = f(z)$.

(b) Niech g oznacza gałąź pierwiastka kwadratowego z f określoną na Ω_{R_0}, która przyjmuje wartość rzeczywistą dodatnią w punkcie $z = 2R_0$. Pokaż, że funkcja $h(z) = \frac{g(z)}{z}$ ma usuwalną osobliwość w nieskończoności.

(c) Niech g będzie taka jak w poprzednim punkcie. Załóżmy, że

$$g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_k z^k$$

jest rozwinięciem funkcji g w szereg Laurenta na Ω_{R_0}. Wyznacz współczynniki a_0, a_1, a_{-1}.

(d) Wyznacz wartość całki $\int_{\partial D(0,2R_0)} g(z)\,dz$ (okrąg, po którym całkujemy, jest zorientowany dodatnio).

Zadanie 6. (10p.)

Załóżmy, że $f\colon D(0,1) \to D(0,1)$ jest holomorficzna.

(a) Pokaż, że dla dowolnych $z_1, z_2 \in D(0,1)$ zachodzi

$$\left|\frac{f(z_1) - f(z_2)}{1 - \overline{f(z_1)}f(z_2)}\right| \leqslant \left|\frac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z_1}z_2}\right|.$$

Podpowiedź: Dla ustalonego z_1 złóż f z odpowiednią homografią i skorzystaj z lematu Schwarza.

(b) Pokaż, że dla dowolnego $z \in D(0,1)$ zachodzi nierówność

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leqslant \frac{1}{1 - |z|^2}.$$